Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen XVI. Número 1 — 28 de octubre de 2022

John Allen Paulos

Entrevista a John Allen Paulos

En este número del Boletín tenemos el inmenso honor de tener con nosotros a John Allen Paulos, conocido escritor y divulgador de las matemáticas que ha tenido la deferencia de conceder esta entrevista a José Ramón Sánchez García, profesor del *IES Los Ángeles* de Almería.

El profesor Paulos necesita poca presentación por nuestra parte, pues ha publicado numerosos libros de divulgación matemática. Obras como *El hombre anúmerico*, *Un matemático lee el periódico* o *Érase una vez un número* han sido todo un éxito editorial con miles de ejemplares vendidos en todo el mundo.

Hemos respetado la entrevista en inglés y, para aquellos que lo deseen, incluimos una traducción al castellano al final del Boletín.

(Artículo completo en la página 3)

Anécdotas matemáticas

La historia de las matemáticas está repleta de curiosidades y anécdotas interesantes. No debemos olvidar que la ciencia la hacen las personas y, en consecuencia, se comportan como tales, con aspectos positivos y otros, no tanto.

En muchas ocasiones, el conocimento del contexto histórico y de las personas que lo vivieron nos hace compreder mejor los resultados matemáticos.

En este artículo, estudiantes del Grado en Matemáticas hacen un repaso sobre la biografía de algunos personajes matemáticos.

(Artículo completo en la página 21)

Editorial: Quo Vadis

Comenzamos el decimosexto año de nuestro Boletín. Dieciseis años dan para mucho y es un buen momento para echar la vista atrás y realizar algunas reflexiones que nos permite la visión del paso del tiempo.

Hace dieciseis años la situación de los estudios de Matemáticas era muy diferente a la actual. Escasas vocaciones, dudas sobre la continuidad del título y aspectos varios que no merece la pena ahondar en ellos.

Actualmente nos encontramos en un momento dulce de nuestro título, con una gran demanda por parte de los estudiantes y con un empleo pleno de nuestros egresados.

Este buen estado de la matemáticas no puede ubicarnos en la autocomplacencia, debemos preguntarnos hacia dónde vamos.

Se vislumbran algunos nubarrones en el futuro. ¿Estamos construyendo los cimientos para formar a las nuevas generaciones en las competencias matemáticas?, ¿los planes de estudios de los que van a ser los maestros en primaria consideran importante la formación matemática de los graduados?, ¿están accediendo al Máster de Profesorado de Educación Secundaria –obligatorio para impartir docencia– los perfiles más competentes en matemáticas?

Dejamos abiertas estas cuestiones e invitamos a reflexionar al respecto.

Resumen

Correo electrónico: bmatema@ual.es

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

ENTREVISTA

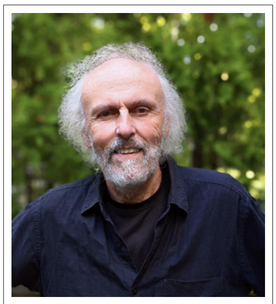
John Allen Paulos

Profesor, escritor y divulgador de las Matemáticas

José Ramón Sánchez García
IES Los Ángeles (Almería)

A través de sus clases ha enseñado a miles de estudiantes, y gracias a sus libros son millones los lectores de todo el mundo que han aprendido matemáticas. Recorrer sus páginas es transitar el fértil camino de la sonrisa, el ingenio, el humor, la inteligencia, la claridad y las observaciones sorprendentes. Como todos los buenos libros, los suyos generan más preguntas que respuestas, y esta entrevista es tan sólo una pequeña muestra de ellas. Desde este Boletín le estamos eternamente agradecidos por su amabilidad y cercanía.

Con ustedes, John Allen Paulos.



John A. Paulos

You have two facets: one as a teacher and another one as a writer, to popularize and spread Maths in our days. What is the relationship between them? How do they influence each other?

Perhaps surprisingly, not that much. I'm a bit more serious in class and hew fairly closely to the syllabus, but now and then I do give a humorous interpretation of a mathematical notion or an anecdote that resonates with some topic in popular culture.

You show a particular sense of humor in all your books. Even more, the first ones were titled *Mathematics and Humor* and *I Think, Therefore I Laugh*. Do you really think the connection between humor and Maths is deeper than with other disciplines?

I don't know about "deeper", but there is, I think a strong connection. Both math humor place a premium on ingenuity and cleverness. Moreover, logic, patterns, rules, and structure are common to both in different ways. *Reductio ad absurdum* often plays a role in both as well, in mathematics as a means of proof and in humor for the sake of the absurdum.

In *Innumeracy*, you warned of the dangers of not having any basic mathematical knowledge. 30 years later, has the situation changed at all? Are we still in the same place?

Yes and No. Hard to generalize. The increased emphasis on STEM subjects has improved pedagogy and understanding in many schools, but unfortunately innumeracy is still widespread in society and remains an underrated driver of bad policy and bad politics.

What is more important, improving the mathematical skills of citizens or rulers?

In the short term perhaps rulers, but in the slightly longer term citizens.

Are you still surprised by certain irrational behaviors? Don't you think some wars, for example against pseudosciences, are lost?

Horoscopes and astrology are still widely believed, but I'd like to think less so. The craziness now is more social (QAnon, conspiracy theories), than focused on traditional pseudosciences.

When we are wrong in any business or investments, we don't usually tell anyone. In your case, far from it, you wrote a best seller telling how and why you had lost hundreds of thousands of dollars playing the Stock Market. Why did you do it? Was it a kind of catharsis for you?

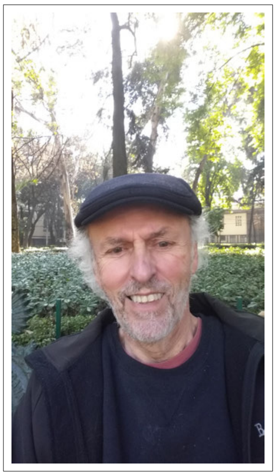
Perhaps, but I did want to write a sort of primer on the stock market. I also wanted to recoup some of my losses, which I did.

In *A numerate life*, your particular autobiography, you try to be as much objective and honest as possible. Do you think you achieved that purpose?

To some extent, yes.

Since Carl Sagan said that all of us are made or starstuff, you have coined the term *mathstuff* to express that it is the stuff of which "we and everything else are made". What does it mean? Is Maths all around, inside and outside of us?

Mathematics develops from the idealization and abstraction of common activities: combining pebbles can lead to arithmetic; lining up twigs can lead to geometry, walking and moving can lead to other mathematical notions, many of which are internal to us. There's obviously more to this. . .



By the way, in that book, *A numerate life*, we can read: "As I became less intelligent, became more a writer than a mathematician". Well, do you still get Christmas cards from the Writers Guild?

No.

Let's talk about education. From your own experience, and also of your children, what do you think

 ISSN 1988-5318

about the evolution of the education in general, and of the mathematical education in particular?

It has improved, but again the improvement is nowhere near uniform. My children's math education is not typical for the obvious reason.

In your opinion, what should be the use of technology in a Maths classroom?

No single answer. Depends on the students. It's Important that students understand what they're doing before using technology to help them do it.

And what are the main skills that a Maths teacher should have?

Understanding math and the different ways different students learn. Psychological skills and insights are, of course, important as well.

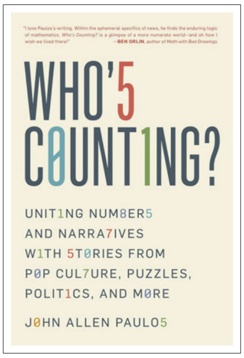
Beyond your facets as mathematician and writer, do you see yourself as a tireless observer of human behavior? I really think you are.

Yes, I do notice things about people that others often don't. There's a joke that's relevant. What is the definition of an introverted mathematician? Answer: He's the one that looks at **your** shoes while he's talking to you.

In your books, you spread a big list of philosophers of all time: Plato, Aristotle, Hume, Russell, Wittgenstein... What is your relationship with Philosophy? Is it closer to Maths than we may think?

I minored in several subjects as an undergraduate, including philosophy, before settling on math. The philosopher Bertrand Russell was an idol of mine since junior high, and I knew he was a logician, which is the area in which I wrote my Ph.D. thesis. Additionally, *I Think, Therefore I Laugh* is quite philosophically flavored and reflects the fact I've always gravitated to analytic philosophy.

In this post-truth era, where emotions amplified on social networks are more important than any rational argument, how can Mathematics help us? Can they rescue us?



Math, broadly conceived to include logic, probability and a respect for facts, is one of our most basic and reliable guides to reality. As I wrote in my latest book, *Who's Counting–Uniting Numbers and Narratives*, a society that replaces them with power, wealth, and duplicity is not a healthy one.

Have you ever tried to write non–mathematical books? Novels, stories...

Yes, but not successfully. My writing is always too clear and transparent to generate any suspense about a plot or a character.

Your last book, *Who's counting?*, is a selection of articles and writings from your column on ABC News. What is their common denominator?

About half of it is older columns which are still relevant to today's issues and even to perennial ones. The other half is new material on contemporary matters such as fake news, Covid, abortion, and (ir)religion.

After that, could you give us any idea about the book you are working on now?

Just jotting down random observation and hoping that they marinate for a while, they will suggest a new book. Who knows if they will?

Finally, an exercise in imagination. If you could choose a historical character to ask a question, who would you choose and what question would you ask?

I don't know. I'd be afraid that some hero of mine would turn out to be an ignorant jerk.

Nota: Hemos respetado la entrevista en inglés tal y como nos la ha enviado John Allen Paulos. Al final del boletín (página 25) incluimos una traducción al castellano. ■

Actividades matemáticas

Noche Europea de los Investigadores

Investigadores de la actividad Green Maths

El 30 de septiembre se celebró la undécima edición de la *Noche Europea de los investigadores*, el mayor escaparate de divulgación científica de Europa que en esta ocasión estuvo dedicado a las *Misiones de Horizonte Europa*.

Un año más la capital almeriense lideró este evento gracias a la respuesta de miles de ciudadanos y a la participación de más de 650 investigadores con 87 expositores de diversas temáticas, repartidos entre la Rambla Federico García Lorca y el Patio de Los Naranjos de la Delegación de Gobierno de la Junta de Andalucía.

Investigadores del departamento de Matemáticas de la *Universidad de Almería* acercaron su labor investigadora a la ciudadanía mediante la organización de las actividades «Green Maths», «Retos matemáticos» y «Fractales» con materiales manipulativos y realidad virtual.

ISSN 1988-5318

Los asistentes tuvieron la oportunidad de comprobar que las matemáticas, además de ser útiles en cualquier ámbito de la vida, son entretenidas.

VII Concurso IndalMat

El 14 de octubre estudiantes de 4.º de ESO y de bachillerato procedentes de 39 centros, la mayoría de la provincia de Almería, se dieron cita en la *Universidad de Almería* para participar en la séptima edición del concurso de resolución de problemas matemáticos *IndalMat*.

Asistentes a la actividad

Con el aforo al completo, un total de 482 participantes disfrutaron de esta jornada que tiene como objetivo acercar a los estudiantes almerienses a las matemáticas de forma lúdica.

Eduardo Sáenz de Cabezón en la conferencia

El evento fue inaugurado por el rector Carmelo Rodríguez Torreblanca y contó con la presencia del matemático y divulgador científico Eduardo Saénz de Cabezón, quien impartió una interesante conferencia titulada *El espejismo de la mayoría* en la que explicó cómo las matemáticas pueden ayudarnos a evitar los efectos negativos de las redes sociales.

La entrega de premios se realizará a mitad de noviembre en fecha por determinar.

Premio al mejor TFG convocado por la UAL-RSME

En el marco del convenio entre la *Universidad de Almería* y la RSME, la comisión mixta formada para juzgar este premio lo ha otorgado al estudiante David Ruiz Casternado, por el TFG titulado *Aplicaciones holomorfas con rango de tipo compacto*.

El premiado recibirá 300 euros aportados por la *Facultad de Ciencias Experimentales*, una suscripción de 2 años a la RSME y un diploma acreditativo al mejor TFG del Grado en Matemáticas en 2022.

El acto de entrega tendrá lugar durante los actos conmemorativos del patrón de la Facultad, san Alberto Magno.

Entrega de Premios de la Fase Local de las LIII Olimpiadas de Matemáticas 2022

El pasado 23 de junio la *Facultad de Ciencias Experimentales* organizó un acto conjunto de reconocimiento a los ganadores de las fases locales de las cuatro olimpiadas que organiza la Facultad dentro del contexto nacional (Física, Geología, Matemáticas y Química).

En lo que respecta a la Olimpiada Matemática, organizada por la RSME y la *Facultad de Ciencias Experimentales*, el primer clasificado en la fase local fue el estudiante Andrey Parrilla Prokopyev, del *Colegio Internacional SEK Alborán*, siendo segundo Iván García Harlouchet, del *IES Alborán–Manuel Cáliz*, y el tercero Ramón Domech León, del *IES Alyanub*.

Los estudiantes recibieron los diplomas y obsequios en un bonito acto que contó con la presencia de sus familiares y profesores, del equipo decanal de la Facultad y de los coordinadores de las Olimpiadas.

I Olimpiada Matemática Nacional Juvenil para el 2.º ciclo de la ESO

La *Facultad de Ciencias Experimentales* acogió el 4 de junio la *I Olimpiada Matemática Nacional Juvenil*, organizada por la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* y destinada al alumnado de 3.º y 4.º de ESO.

Los candidatos seleccionados que representaron a la provincia

[1] Más información en *fespm.es/index.php/2022/06/05/i-olimpiada-matematica-de-2o-ciclo-eso*.

ISSN 1988-5318

de Almería fueron: Alejandro Casas Pyatunina (*Colegio Agave*), Daniel Sánchez Lew (*IES Mediterráneo*) y Guillermo Serrano Caparrós (*IES Saladares*) [1].

Exposición Paseo Matemático al–Ándalus

Cartel anunciador

Del 19 de septiembre hasta el 15 de octubre se ha tenido en la *Universidad de Almería* la exposición *Paseo matemático al–Ándalus*, una iniciativa de la *Fundación Descubre* que tiene como objetivo acercar la ciencia a la ciudadanía integrando arte, matemáticas, tecnología y turismo.

La exposición estuvo compuesta por 24 paneles impresos donde se conecta el arte, la ciencia y el patrimonio monumental andaluz de las épocas califal, almohade y nazarí [2].

Semana de la Ciencia 2022

El *Vicerrectorado de Investigación, Desarrollo e Innovación* de la *Universidad de Almería*, a través de la OTRI, organiza la *Semana de la Ciencia*, que este año se celebrará del 7 al 11 de noviembre.

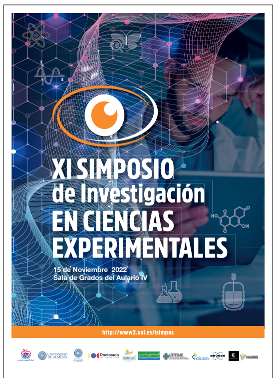
Esta actividad, dirigida especialmente a estudiantes de 4.º de ESO, Bachillerato y Formación Profesional, pretende acercar el conocimiento científico y tecnológico a la sociedad mediante la divulgación de la investigación que se realiza en la *Universidad de Almería* a través de diversas actividades didácticas y lúdicas con el objetivo de despertar vocaciones científicas.

Dentro de las actividades divulgativas organizadas estará el tradicional *Café con Ciencia* que supone un punto de encuentro entre profesionales de la ciencia y estudiantes en un entorno cercano y participativo.

¡Os animamos a que os apuntéis con vuestro centro!

Más información en *www.ual.es/semanadelaciencia*.

XI Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales



Cartel

Enmarcado en de la festividad de san Alberto Magno, la *Facultad de Ciencias Experimentales* celebrará el 15 de noviembre la undécima edición del *Simposio de Investigación en Ciencias Experimentales*.

Este evento, dirigido especialmente a los jóvenes investigadores de la Facultad, pretende ser un foro de encuentro donde puedan compartir su trabajo científico e intercambiar reflexiones y proyectos, propiciando, de este modo, la generación de nuevas ideas y colaboraciones. Para visibilizar esta labor se realizarán comunicaciones tipo flash y presentación de pósteres.

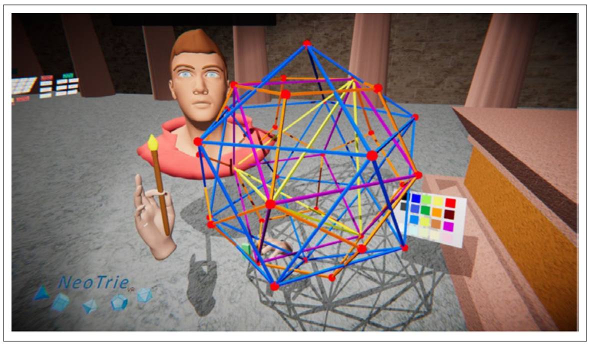
En esta edición se otorgarán 7 premios de 300 euros y otros 4 premios de 150 euros a los mejores pósteres/presentaciones.

El plazo de inscripción permanecerá abierto hasta el día 2 de noviembre. Desde el Boletín os animamos a que participéis y compartáis vuestra investigación.

Más información en *www2.ual.es/isimpos*.

NeoTrie VR

Investigadores, profesorado y estudiantes de diferentes niveles educativos, bajo la dirección de José Luis Rodríguez, del *Departamento de Matemáticas* de la *Universidad de Almería*, han seguido colaborando en el desarrollo de una versión educativa del software de realidad virtual *Neotrie VR*, que además incorporará en breve el modo multijugador, muy útil para la docencia presencial y sobre todo online de la geometría 3D.



Captura de pantalla de NeoTrie VR

Las numerosas actividades que han organizado pueden consultarse en la web del proyecto [3].

XI Congreso Internacional en Modelos Gráficos Probabilísticos

El *Centro para el Desarrollo y Transferencia de Investigación Matemática a la Empresa* (CDTIME), en colaboración de la *Facultad de Ciencias Experimentales* y el *Departamento de Matemáticas*, organizó la undécima edición del *Congreso Internacional en Modelos Gráficos Probabilísticos* (PGM 2022), el cual se celebró del día 5 al 7 de octubre en el campus de la *Universidad de Almería*.

El comité organizador estuvo presidido por Antonio Salmerón Cerdán y Rafael Rumí Rodríguez, ambos catedráticos del *Departamento de Matemáticas* de la *Universidad de Almería* y reconocidos investigadores en el campo de los modelos gráficos probabilísticos.

El evento fue todo un éxito y supuso un punto de encuentro de la comunidad científica que trabaja en el campo

[2] Más información en *paseosmatematicos.fundaciondescubre.es*.
[3] *www2.ual.es/neotrie/comunidad*.

ISSN 1988-5318

del razonamiento probabilístico, la toma de decisiones y el aprendizaje con modelos gráficos. Más información en *www2.ual.es/pgm2022*.

Una sesión del evento

Actividades de la SAEM Thales

La SAEM Thales ha organizado las siguientes actividades:

- *XXIII Concurso de Problemas de Ingenio, Patrimonio y Matemáticas Thales* para 4.º ESO, *IES Puebla de Vícar*.
- *I Olimpiada Matemática Nacional Juvenil* para el 2.º ciclo de la ESO.
- *XXVII Edición de Cursos Thales-Online* (octubre–diciembre 2022). Más información en *mileto.cica.es/cursos*.

Más información en *thales.cica.es/almeria/*.

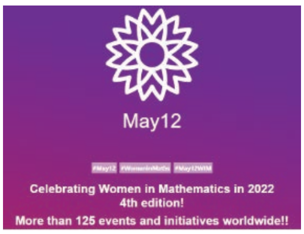
Noticias matemáticas

Conferencia de Guillermo Curbera el 25 de noviembre

El catedrático de la *Universidad de Sevilla*, Guillermo Curbera, abordará en la conferencia *Matemáticos del mundo: ¡uníos!* el tema de los *Congresos Internacionales de Matemáticas* organizados por la *Unión Matemática Internacional.*

La conferencia tendrá lugar en la Sala de Grados del Aulario IV a las 12,15 h. ¡Os animamos a asistir!

Día Internacional de la mujer matemática 2022



El 12 de mayo se celebró el *Día Internacional de la Mujer Matemática*, una fecha que tiene como objetivo inspirar a las mujeres matemáticas de todo el mundo a celebrar sus logros y fomentar un ambiente de trabajo abierto, acogedor e inclusivo para todos.

Para conmemorar este día, la *Comisión de Mujeres y Matemáticas* de la RSME organizó una mesa redonda integrada por alumnas del grado en matemáticas y por matemáticas que desempeñan profesiones diferentes, quienes abordaron las salidas laborales de esta disciplina y hablaron de su experiencia personal en el mundo de las matemáticas.

El *Día Internacional de la Mujer Matemática* se celebró por primera el 12 de mayo de 2019 a propuesta del *Comité de Mujeres y Matemáticas* de la *Sociedad Matemática Iraní*. La fecha fue escogida en homenaje a la matemática iraní Maryam Mirzakhani.

Más información en *may12.womeninmaths.org*.

Olimpiada Internacional de Matemática 2022

Durante los días 11 y 12 de julio se celebró en Oslo (Noruega) la 63.ª edición de la *Olimpiada Matemática Internacional* (IMO), en la que han participado un total de 589 estudiantes de secundaria procedentes de 104 países y territorios de todo el mundo.

Equipo español participante en la Olimpiada Internacional de Matemáticas. De izquierda a derecha: Álvaro Gamboa, Jordi Ferré, Javier Badesa, Roger Lidón, Darío Martínez y Martín Padrón.

Los seis participantes del equipo español sumaron un total de 139 puntos en las pruebas, situando a nuestro país en la posición número 42 y consiguieron cuatro medallas de bronce y dos menciones honoríficas. Los bronces fueron para Roger Lidón, Álvaro Gamboa, Jordi Ferré y Darío Martínez, mientras que Javier Badesa y Marín Padrón recibieron la mención de honor ¡Enhorabuena a todos!

Olimpiada Iberoamericana de Matemática 2022

Del 25 de septiembre al 1 de octubre tuvo lugar la trigésimo séptima edición de la *Olimpiada Iberoamericana*

ISSN 1988-5318

de Matemáticas (OIM) que contó con la participación de 20 países.

En esta ocasión la competición se realizó de forma presencial en Bogotá (Colombia) después de dos años de pandemia.

El equipo español, liderado por Ander Lamaison y tutorizado por Marc Felipe (antiguo olímpico), ha hecho pleno de medallas alzándose con dos de plata para Roger Lidón Ardanuy y Darío Martínez Ramírez y dos de bronce para Jordi Ferré García y Álvaro Gamboa Rodríguez ¡Enhorabuena a todos!

Medallas Fields 2022

El 5 de julio se anunciaron los premios 2022 de la *Unión Matemática Internacional*. Las cuatro *Medallas de Fields*, que se conceden cada cuatro años a matemáticos de menos de 40 años, fueron para la matemática ucraniana Maryna Viazovska (Kiev, Ucrania), siendo la segunda mujer en recibirlo, (Maryam Mirzakhani fue la primera), James Maynard (Chelmsford, Inglaterra), June Huh (California, EE. UU.) y Hugo Duminil-Copin (Châtenay-Malabry, Francia).

Nos visitaron. . .

En el transcurso de estos meses nos han visitado investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a: David Arcoya Álvarez y José Luis Gámez Ruiz, de la Universidad de Granada; Villő Csiszár, de la Loránd Eötvös University y del Institute of Evolution (Hungría); Diego E. Dominici y Veronika Pillwein, de la Johannes Kepler University Linz (Austria); Michel Dubois-Violette, del CNRS Université Paris-Saclay (Francia); József Garay, del Institute of Evolution (Hungría); Tamás F. Móri, del Alfréd Rényi Institute of Mathematics y del Institute of Evolution (Hungría); y Rita Zuazua Vega, de la Universidad Autónoma de México.

Preguntas frecuentes

¿Es necesaria alguna acreditación lingüística para poder terminar mis estudios de Grado en la Universidad de Almería?

Todos los estudiantes de cualquiera de los grados que se imparten en la *Universidad de Almería* deben acreditar obligatoriamente, para la obtención de su título, el nivel B1 o superior de una lengua extranjera, dentro del *Marco Común Europeo de Referencia* para las lenguas.

Los estudiantes extranjeros deberán acreditar el conocimiento de una lengua extranjera distinta de su lengua materna, pudiendo, por tanto, ser dicha acreditación en lengua castellana o en otra que no sea la suya propia.

Los estudiantes de tercer y cuarto curso del Grado en Matemáticas que aún no estén en posesión de la acreditación B1 necesaria para obtener su título de graduado, o aquellos que deseen obtener una acreditación superior, pueden solicitar las ayudas que la *Facultad de Ciencias Experimentales* convoca para la acreditación de idioma extranjero a través del Centro de Lenguas de la UAL. La solicitud se realiza mediante correo electrónico a `fccee@ual.es` desde la fecha del examen establecida por el *Centro de Lenguas*, hasta el 31 de julio de 2023, adjuntando el modelo de solicitud, la copia de la carta de pago de la matrícula en el Grado en Matemáticas del curso 2022–23 y la copia del justificante de pago del curso realizado en el *Centro de Lenguas de la UAL* en el que incluya el gasto del examen (también durante el curso 2022–23).

Se convocan 5 ayudas para este curso para estudiantes de este grado que realicen el examen (una por estudiante). En caso de haber más solicitudes de las ofertadas se seleccionará a los estudiantes por su expediente académico.

¿Qué representación tienen los estudiantes en la Universidad de Almería a la hora de contribuir a la toma de decisiones?

El *Consejo de Estudiantes de la Universidad de Almería* (CEUAL) es el órgano universitario de representación estudiantil encargado de canalizar y coordinar dicha representación en el ámbito de la Universidad de Almería.

Está formado por cuatro representantes de cada Centro elegidos por y entre los miembros de cada Delegación de Centro [4].

La Delegación de Ciencias Experimentales se llama DELTA y de los cuatro representantes de esta Delegación en el Consejo de Estudiantes, dos de ellas son estudiantes del Grado en Matemáticas. DELTA tiene un Instagram (`@delta_ual`).

La Delegación de Estudiantes de cada Centro está constituida por los representantes de los estudiantes de dicho centro: estudiantes claustrales de las titulaciones adscritas al centro, estudiantes representantes de la Junta de Centro y Delegados/as y Subdelegados/as de clase de las titulaciones impartidas en ese centro. Todos los ór-

[4]La composición de los miembros del Consejo de Estudiantes y su Reglamento de Régimen Interno se puede consultar en *www.ual.es/universidad/otrosorganos/consejo-de-estudiantes*.

ISSN 1988-5318

ganos unipersonales de la Delegación de Estudiantes son elegidos para un mandato de un año, a contar desde su elección. En breve, se procederá a la elección de la Delegación de Ciencias Experimentales. La convocatoria se hará pública y se fijará la fecha, lugar y horario de celebración de la votación. Os animamos a formar parte de esta representación estudiantil.

ENSEÑANZA SECUNDARIA

Acercar la robótica a nuestros alumnos a través de la propia experiencia

Pilar Gámez Gámez
CE Agave (Huércal de Almería, Almería)

Computación y Robótica es una materia de libre configuración autonómica que se oferta en el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. La finalidad de dicha materia es permitir que los alumnos y las alumnas aprendan a **idear, planificar, diseñar y crear sistemas de computación**, como herramientas que facilitan cambiar el mundo, y que desarrollen una serie de capacidades cognitivas integradas en el denominado **Pensamiento Computacional**.

Se trata de un proceso basado en la creatividad, la capacidad de abstracción y el pensamiento lógico-crítico. Permite, con la ayuda de un ordenador, formular problemas, analizar información, modelar y automatizar soluciones, evaluarlas y generalizarlas. Además, el aprendizaje de esta materia debe promover una actitud de creación de prototipos y productos que ofrezcan soluciones a problemas reales identificados en la vida diaria del alumnado y en el entorno del centro docente. El objetivo, por tanto, de Computación y Robótica es **unir el aprendizaje con el compromiso social**.

En nuestro centro se presenta y analiza la robótica educativa como una herramienta de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje, orientada principalmente a asignaturas como la **matemática**, física, tecnología e informática, entre otras.

La robótica se puede convertir en una herramienta excelente para comprender conceptos abstractos y complejos en asignaturas del área de las ciencias; así como también permite desarrollar competencias básicas tales como **trabajar en equipo** y la colaboración, que son la piedra angular de cualquier proyecto de robótica. El planteamiento de esta materia en el centro es el siguiente:

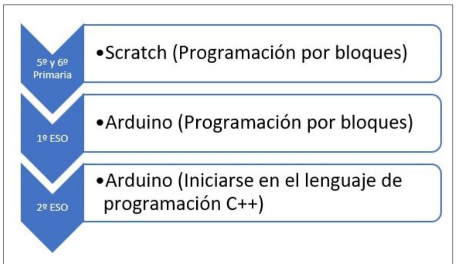


Figura 1

Con el fin de desarrollar distintas competencias, en el centro hemos creado un proyecto transversal y plural que nos permite adaptar y personalizar las tareas y conceptos que queríamos trabajar. Esto lo hemos llevado a cabo con la construcción de una ciudad robótica.

Los alumnos han realizado una maqueta a escala playmobil en la que se han incluido tres elementos:

- **Semáforos**: Además de la construcción de un semáforo que pasa por los tres colores, para atender a la diversidad se ofrecía la posibilidad de hacerlo con botón peatonal (Figura 2).
- **Farolas**: Las luces de calles y carreteras se iluminan a través de sensores capaces de detectar cuando no hay suficiente luz natural (Figura 3).
- **Barrera levadiza**: Para poder atravesar la vía del tren de nuestra ciudad realizaron esta barrera con ayuda de un servo motor (Figura 4).

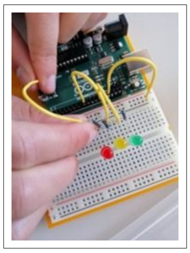


Figura 2

Figura 3

Figura 4

Todo ello programado por ellos mismos con Arduino.

Sin duda, añadir un marco de fondo próximo a los alumnos nos permite trabajar desde una base más o menos conocida por todos, con lo cual además de unas ideas ya pensadas (aunque no siempre conscientemente) sobre el objetivo al que llegar, añade un plus de interés por implicarse en primera persona en temas de mucha proximidad.

Convencidos de que la robótica abre abanicos de nuevas posibilidades, queremos contribuir a difundirla para que todas las personas, además de utilizarla, la entiendan y quieran crearla.

El objetivo principal es **acercar la robótica a nuestros alumnos a través de la propia experiencia.** ■

ENSEÑANZA SECUNDARIA

JPM 2022

IV Jornada del Profesorado de Matemáticas de Almería

María del Mar García López
Universidad de Almería
Juan Francisco Guirado Granados
IES Río Aguas, (Sorbas, Almería)
Miguel Francisco Pino Mejías
IES Aguadulce, (Aguadulce, Almería)
Isabel María Romero Albadalejo
Universidad de Almería
Pedro Sorroche Fuentes
IES Río Aguas, (Sorbas, Almería)
Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

El pasado 7 de mayo se celebró en las instalaciones de la *Universidad de Almería*, la cuarta *Jornada del Profesorado de Matemáticas de Almería* [5].

Foto de familia

Esta actividad, retomada después del periodo pandémico que hemos sufrido, pretende ser un foro de encuentro del profesorado de matemáticas de los diferentes niveles educativos, donde poder compartir experiencias.

En la jornada, además de una exposición de pósteres, el catedrático de la *Universidad de Sevilla* Antonio J. Durán impartió una interesantísima conferencia titulada *Einstein y el Quijote* y se realizaron cuatro talleres que pasamos a describir brevemente:

Actividades aleatorias y autocorregibles con Geogebra. Miguel Francisco Pino Mejías.

En este taller práctico se presenta cómo crear actividades con *GeoGebra* de generación aleatoria y que se corrigen sin necesidad de intervención del profesorado. Este tipo de actividad permite crear y facilitar al alumnado ejercicios que ayuden a consolidar aprendizajes practicando tantas veces como sea necesario.

Se inició el taller sondeando entre los asistentes el grado de uso y familiaridad con *GeoGebra*, se observó que la casuística era variada y con ese punto de partida se pasó al desarrollo del encuentro realizándose una introducción general para aquellas personas menos familiarizadas con el entorno de trabajo.

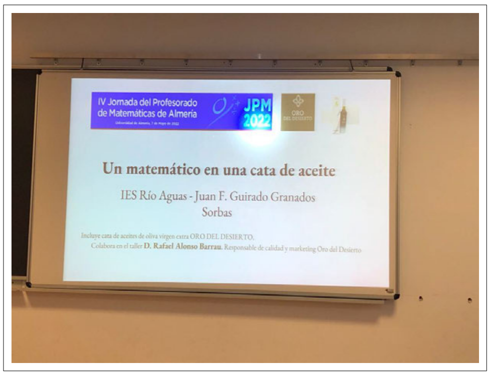
Al ser una actividad práctica cada participante disponía de un equipo *GeoGebra* para poder realizar las distintas actividades simultáneamente. Se facilitó un libro de *GeoGebra* en el que se mostraban los pasos a seguir en la construcción de las distintas tareas, de este modo se fue mostrando cómo se creaba una actividad con ciertas características de aleatoriedad de modo que el alumnado no se encontrase siempre los mismos enunciados.

Para cada elemento mostrado había una propuesta de práctica con el fin que quienes participaban en el taller comprobasen de primera mano las bondades de este tipo de ejercicios. Una vez creadas las actividades se pasó a mostrar la segunda parte del taller, configurar la herramienta para que las actividades se corrigiese automáticamente y se mostrase una retroalimentación cuando fuese necesario.

El taller se desarrolló de una forma amena sucediéndose las interacciones entre el ponente y los participantes que mostraban su interés por la herramienta y las distintas posibilidades que se les abrían con este tipo de actividades.

Un matemático en una cata de aceite. Juan Francisco Guirado Granados.

El taller tuvo dos partes bien diferenciadas. La primera expositiva acerca de propiedades, cálculos y diversas operaciones aritméticas que hay que realizar para conseguir una buena cosecha de aceituna.



La información técnica que se ofreció sirve tanto para preparar clases a nuestros alumnos, con problemas muy cercanos a la realidad, como para pequeños agricultores

[5] Más información en *www2.ual.es/jpm2022*.

 ISSN 1988-5318

que deseen aumentar su producción o darle más calidad al aceite de oliva que obtienen en la almazara.

La segunda parte fue la cata de aceite dirigida por Rafael Alonso de *Oro del Desierto Aceite de Oliva Virgen Extra* de Tabernas. En ella se fueron detallando todos los aspectos a tener en cuenta cuando deseamos apreciar todas las cualidades del oro líquido. Se compararon 3 aceites sin revelar las marcas y se pudieron apreciar las diferencias en aroma, cuerpo y otras cualidades.

Al final del taller se realizaron diversas intervenciones para aclarar dudas particulares a asistentes que tienen olivos y querían obtener algunos consejos para mejorar sus cosechas y hacerlas más rentables y con más calidad. De nuevo la sabiduría del Director Comercial y Export Manager de Oro del Desierto, Rafael Alonso, fue clave y de gran ayuda para todos los participantes del taller.

NeoTrie VR: realidad virtual para la enseñanza de la geometría 3D. María del Mar García López, Isabel María Romero Albadalejo y Pedro Sorroche Fuentes.

El taller estuvo dividido en tres secciones: presentación de *NeoTrie VR*, aplicación en el aula de secundaria y manejo del software por parte de algunos participantes.

En la primera parte, Isabel Romero y Mar García, profesoras del Departamento de Educación de la UAL, presentaron a los asistentes el software de realidad virtual inmersiva para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría *NeoTrie VR*. Dicho software está siendo desarrollado en la Universidad de Almería por el profesor José Luis Rodríguez Blancas y sus colaboradores (programadores y profesores del Departamento de Educación y de Institutos de Secundaria). Se mostraron en directo algunas de las herramientas y potencialidades de Neotrie para resolver tareas sobre poliedros regulares y semirregulares, superficie-volumen de ortoedros y fractales.

En la segunda parte, el profesor Pedro Sorroche, del *IES Río Aguas* (Sorbas), compartió con los asistentes su experiencia implementando en el aula la realidad virtual inmersiva en el aprendizaje de la geometría en el plano y en el espacio en 2.º y 3.º de ESO. Los asistentes pudieron observar, a través de imágenes y vídeos, cómo el alumnado usaba *Neotrie VR* junto a otros materiales manipulativos más tradicionales (GEOMAG, troquelados. . .) y lo integraba con total normalidad, como un recurso más a disposición de su proceso de enseñanza–aprendizaje. Concluyó que su experiencia en el aula había sido muy positiva, pues si bien se necesita un período previo de aprendizaje y adaptación por parte del alumnado, éste suele ser corto y, a cambio, las ventajas que supone una mayor participación, implicación y motivación del alumnado son mucho mayores.

En la tercera parte del taller, varios profesores tuvieron la oportunidad de sumergirse en el entorno virtual creado por Neotrie y probar algunas de sus posibilidades.

Estadística con software libre. Fernando Reche Lorite.

La enseñanza de conceptos estadísticos está muy limitada en los programas de secundaria y bachillerato. Para acercar estos conceptos a los estudiantes de forma amena y cercana es necesario disponer de herramientas de software sencillas y amigables y que, además, no suponga un coste inasumible por los centros educativos.

Existen herramientas libres, como R, de enorme potencial pero difíciles de aplicar en el aula de secundaria y bachillerato pues necesitan de una cierta formación incial.

Sin embargo, en los últimos tiempos se han desarrollado aplicaciones más «amigables» que puede hacer esta tarea sencilla.

Una de ellas es JASP (*jasp-stats.org*), un entorno gráfico muy intuitivo que permite ejecutar una gran cantidad de procedimientos estadísticos.

En el taller se explicó el funcionamiento básico del software mediante ejemplos prácticos que permitió acercar a los asistentes una forma práctica, amena y sencilla de transmitir al alumnado conceptos estadísticos más allá de la simple explicación teórica o de los clásicos cálculos «a mano». ■

 ISSN 1988-5318

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

INNOVATION = MOTIVATION

Aerospace Research in the Classroom

María Dolores Valera Martínez
Julio César Aldeguer Bolarin
Sara Moreno Fernández
IES Al-Bujaira (Huércal Overa, Almería)

If you are looking for different results, don't do the same thing all the time

Albert Einstein

With the intention of awakening the students' interest in learning and training integrally, the Department of Mathematics of *IES Al-Bujaira* in Huércal-Overa, as a bilingual subject in the first year of ESO, extending the idea to all areas and levels, wanted to coordinate the *STEAM Project: Aerospace Research applied to the classroom* at level III Specialisation, whose objective is to improve the pupils' competences in Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics, using space and all that its study has contributed to humanity as an environment, and as a fundamental methodological principle to put the pupil in the role of researcher, encouraging the use of active methodologies (Flipped Classroom, Project-based Learning), collaborative work, communication skills in Spanish and English and scientific vocations, both in girls and boys.

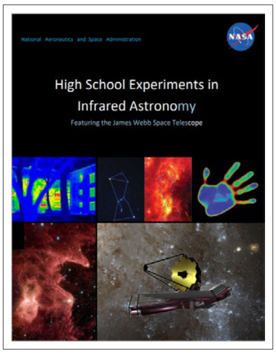
Each teacher will use the selected material, after having carried out the appropriate training and adapted it to their area of knowledge, to finally form heterogeneous groups to achieve the correct collaboration among the students.

The students will have to work on reading texts and watching explanatory videos in English, most of the material provided by ESERO (*European Space Education Resource Office*), a collaboration between ESA (*European Space Agency*) and national partners, share their opinions, mathematical calculations and results obtained, with the subsequent explanation and guidance of the teaching staff. They also use practice kits, CAD programming and design, various computer applications, participation in national and European competitions, etc.

Finally, the students will generate written products (essays, posters, etc.), oral presentations, physical materials (3D prints, models, robots, etc.) and/or digital materials (videos, presentations, websites, simulations, etc.) that will complete the training received and increase the understanding of concepts and their application in reality, highlighting the interdisciplinary nature of knowledge.

Each working group will explain what they have learnt to other levels and groups, using the product generated, thus improving their communication skills in Spanish and English. This year we would also like to incorporate French.

The context of space as an innovative topic is an opportunity in the classroom to foster imagination and curiosity, motivate students to learn, relate theoretical concepts to the real world, practical and lifelong learning, increase students' interest in STEAM disciplines and learn about the importance of the space industry in our lives.



At *IES Al-Bujaira* we have carried out many workshops, among them astronomical observation, planetarium, sundials and planispheres, monitoring the ISS (International Space Station), study of the James Webb telescope and its predecessors, lunar selenography, study of the uses of NASA's Pi, etc. in collaboration with other school plans and programmes, in particular Robotics, including a trip to the Science Park in Granada. All thanks to funds granted by the Junta de Andalucía and contributions from the school.

As an example of this interdisciplinary and methodological experience in L2 we have The Universe of James Webb (JWST). We started working in teams with videos such as the following:

- *https://youtu.be/6VqG3Jazrfs*.
- *https://youtu.be/rHMsveuSyc8*.

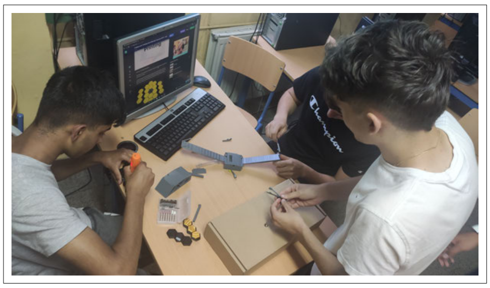
In these, they can deduce that the James Webb Space Telescope (named after the NASA manager who oversaw the Apollo moon landings) is a titanic project, as it is the largest, most powerful and complex telescope ever built, that it is unique in that it is gold-plated, uses infrared radiation, it is foldable (origami), it has cost some ten billion euros and 25 years to complete, for a mission that will only last about ten years at most, and most importantly,

ISSN 1988-5318

it will allow us to see through time to the very beginnings of the universe itself, in a different way than ever before.

Students will investigate and work with readings and mathematical exercises on the construction, properties and symmetry of the hexagon as a component of the main mirror of the JWST, on infrared radiation and its importance.

Finally, we designed with Tinkercad, 3D printed a model of the JWST, assembled it and practised scale exercises (see videos).



In each activity we counted on the participation, in one way or another, of teachers from different areas (Mathematics, Physics and Chemistry, Technology, Computer Science, English, Spanish, Biology, Classical Culture, Physical Education), students, parents, conservers and representatives of the entire educational community of *IES Al-Bujaira*. We would like to thank the UAL newsletter for being able to share this motivating, interdisciplinary and methodological experience with other fellow teachers. We hope you find it as exciting as we do. ■

Concurso de problemas

Problema propuesto

Si $0, 2, 5, 9, 14, 20\ldots$ es la sucesión del número de diagonales de un polígono,

1. ¿Qué polígono tiene el mismo número de diagonales que de lados?
2. ¿Cuál es el siguiente término de la sucesión? ¿de qué polígono se trata?
3. Deduce el número de diagonales de un polígono de n lados.
4. Prueba que el número de diagonales es una potencia de 2 si, y solo si, el número de lados es igual a 4.
5. Demuestra que el número de diagonales es un múltiplo del número de lados si, y solo si, el número de lados es impar. (Aceptamos que 0 es múltiplo de 3).

Si nos envías tu solución a este problema ***puedes obtener*** un estupendo ***reloj inteligente (smartwatch)*** y un regalo relacionado con las matemáticas.
¡La solución más elegante u original tiene premio!
Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico bmatema@ual.es ***hasta el 17 de enero de 2023***.
Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.
Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

ISSN 1988-5318

Resultado del concurso del número anterior

En esta edición el premio ha quedado desierto al no recibirse ninguna solución totalmente correcta.

Sin embargo, otorgamos 3 accésits a las soluciones mejor elaboradas, que han sido las de Lourdes María Juárez Cano (*IES Sabinar*, Roquetas de Mar), Juan Gabriel Maldonado Rubí (*IES Fuente Nueva*, El Ejido) y a Daniel Sánchez Lew (*IES Mediterráneo*, Garrucha).

Problema propuesto en el número anterior

El pasado 14 de marzo, *Día Internacional de las Matemáticas*, hemos inaugurado el «Jardín de lϕs Matemáticϕs». En este jardín hemos incluido los primeros términos de la *sucesión de Fibonacci* por su estrecha vinculación con la botánica. Esta sucesión viene determinada por la relación

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n \geq 1, \\ F_1 = F_2 = 1. \end{cases}$$

1. Comprueba que la siguiente expresión de F_n cumple la relación anterior.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

cuando $n \geq 1$.

2. Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi,$$

donde $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el archiconocido número áureo.

Solución:

En primer lugar, para mayor comodidad en la escritura, notemos

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Apartado 1:

Entonces,

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(A^{n+1} - B^{n+1} + A^n - B^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(A^n(A+1) - B^n(B+1) \right). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$A^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = A+1,$$
$$B^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = B+1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(A^n A^2 - B^n B^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(A^{n+2} - B^{n+2} \right) = F_{n+2}. \end{aligned}$$

Se ha probado la recurrencia. Probemos los valores iniciales:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(A-B) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = 1,$$
$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(A^2-B^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(A+1-B-1) = 1.$$

Apartado 2:

Primero observemos que

$$\frac{B}{A} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \approx -0{,}38.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(A^{n+1} - B^{n+1} \right)}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(A^n - B^n \right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{A - B\left(\frac{B}{A}\right)^n}{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^n} \\ &= A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

puesto que al ser $\left|\dfrac{B}{A}\right| < 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{B}{A} \right)^n = 0.$$

 ISSN 1988-5318

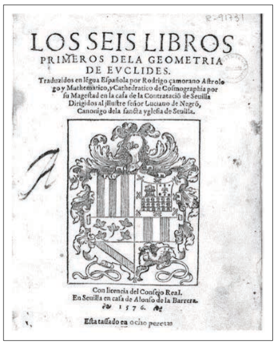
HISTORIA Y SUS PERSONAJES

El todo es igual a la suma de las partes, ¿o no?

Antonio Rosales Góngora
IES Bahía de Almería (Almería)

El conocimiento de la vida de Euclides es escaso y muy difuso, parece ser que vivió entre los años 325 a 265 a. C., que nació en Atenas y que frecuentó la *Academia de Platón* aunque es bastante posterior a él. En realidad el personaje se vio superado y oscurecido por la grandiosidad de su obra, hasta tal punto de ser considerado como una rama del saber más que como un hombre.

Todas las obras escritas por Euclides, al menos doce, han sido eclipsadas por la gran influencia de su obra maestra: *Los Elementos*, donde se muestra toda la matemática griega como un sistema formal axiomático deductivo. Podemos considerar asimismo que con Euclides se produce la delimitación de la matemática como disciplina independiente de la filosofía, dando comienzo la separación entre el conocimiento matemático y la especulación metafísica.


LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en lẽgua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Magestad en la casa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al illustre señor Luciano de Negrõ, Canonigo dela sancta yglesia de Seuilla.
Con licencia del Consejo Real.
En Seuilla en casa de Alonso de la Barrera.
1576.
Esta tassado en ocho peretas

Los Elementos tal como han llegado a nosotros se divide en un conjunto de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes y unas 465 proposiciones distribuidas en 13 libros. Es bien conocida la discusión sobre el papel del *postulado de las paralelas* en la historia de la geometría, se buscaba saber si este postulado es un verdadero axioma o no, es decir, si es o no demostrable.

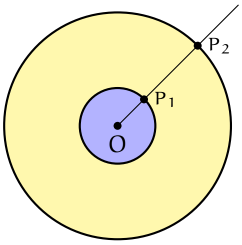
La 5.ª noción común del libro I de Los Elementos establece *«El todo es mayor que la parte»*, o la versión más aritmética que da título al artículo: *«El todo es igual a la suma de las partes»* no ha provocado tanto interés pues parece ser que fue considerada durante mucho tiempo como verdaderamente evidente.

Wallis en su conocido artículo sobre la demostración del postulado de las paralelas (1663) decía: *«Incluso en Euclides se encuentran junto a hipótesis explícitamente formuladas, otras hipótesis que son evidentes ya sea por la percepción de las figuras o por otras razones de las que no se puede dudar de ninguna manera. Una de estas suposiciones, que se encuentra en todas partes, es que el todo es la suma de sus partes. . . »*.

El propio D'Alambert en la Enciclopedia decía *«En Matemáticas se llama axioma a la proposición evidente por ella misma, que no necesita demostración, tal es el caso de el todo es mayor que su parte. . . »*.

A principios del XIX la situación no había cambiado mucho, en los *Elementos de Geometría* (1817) de Legendre se encuentran unos pocos axiomas, entre ellos *«El todo es mayor que su parte. El todo es igual a la suma de las partes en que ha sido dividido»*.

Galileo (siglo XVII) fue uno de los primeros en poner en duda este axioma. Razonó que el conjunto de los número naturales o de contar $1, 2, 3 \ldots$ y el conjunto de los números pares $2, 4, 6 \ldots$ son de igual magnitud. Galileo concluyó que la cantidad de números pares es igual a la cantidad de números naturales, lo cual es contrario a la intuición. Sin embargo no se atrevió a negar el axioma de que el todo es mayor que la parte.



Galileo llegaría a una conclusión similar sobre los conjuntos continuos. Para dos circunferencias concéntricas, una línea radial desde el centro los corta a ambas. Cada punto P_1 en la circunferencia interior se empareja con un punto P_2 en la exterior. Concluyó que debe de haber el mismo número de puntos en cada circunferencia lo cual es sorprendente pues la circunferencia exterior es claramente más larga que la interior.

Galileo estableció que *«los atributos de igualdad, mayoría y minoría no tienen lugar en el infinito»*. Estuvo a punto de un gran descubrimiento pero no desarrolló la idea.

En 1866 J.H.C. Duhamel en su obra *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, una obra de epistemología que se ocupa de los fundamentos de las matemáticas en relación con las otras ciencias, da una primera discusión crítica del problema. Defiende la idea de que el axioma es un enunciado analítico que no expresa más que convenciones del lenguaje pero no avanza ningún argumento. Duhamel dice: *«Así, según el significado que le demos a las palabras todo, parte, mayor, menor, vemos que un todo es mayor que una de sus partes, o que la parte es menor que el todo. Es erróneo, pues, hacer de esta proposición un axioma fundamental que algunos autores de los Tratados de Geometría nos piden admitir como evidentes y situar en medio de sus postulados o verdades indemostrables. Este error, un poco fuerte es cierto, consiste en tomar por una verdad de sentimiento lo que es sólo una verdad de definición»*.

Paralelamente a todo esto, en el XIX se llevó a cabo la aritmetización del análisis que dota al análisis infinitesimal de bases sólidas a partir de los trabajos de Cauchy.

 ISSN 1988-5318

La aritmetización del análisis supuso un cambio en los fundamentos, estos se basarán ahora en la aritmética (los objetos de la geometría pueden expresarse con fórmulas). Sin embargo, el reinado de la aritmética duró poco tiempo, hubo de abdicar a favor de la teoría de conjuntos. Este cambio lo provocó Cantor con bastantes dificultades (en ello perdió la razón).

El punto donde «El todo es mayor que la parte» deja de tener validez absoluta se produce cuando Bolzano define la equipotencia de conjuntos (dos conjuntos son equipotentes cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos) y, a partir de aquí, la diferencia entre conjuntos finitos e infinitos: son infinitos aquellos equipotentes con un subconjunto propio.

Cantor reconoció que el sello distintivo de un conjunto infinito es que se puede emparejar uno a uno con una parte de sí mismo. Usó esta característica para definir conjuntos infinitos. Luego definió dos conjuntos infinitos que se pueden emparejar para que sean del mismo tamaño. Así, Cantor abandonó el axioma de Euclides y razonó que, cuando se trata de conjuntos infinitos, «el todo *no es necesariamente* mayor que la parte».

Si nos preguntamos ¿Quién tenía razón? Podemos contestar que depende del propósito. Si pretendemos modelar el mundo físico necesitaremos axiomas que produzcan resultados realistas físicamente. Para modelos y exploraciones puramente matemáticas, cualquier sistema consistente puede usarse como punto de partida.

Referencias

[1] Boyer, C.B. (1996) *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, Madrid.

[2] Bourbaki, N. (1976) *Elementos de historia de las matemáticas*. Alianza Universidad, Madrid.

[3] Collete, J.L. (1985) *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI, Madrid.

[4] Kline, M. (1992) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad, Madrid.

■

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

El cálculo financiero visto a través del cálculo con fracciones

Salvador Cruz Rambaud
Universidad de Almería

Un principio fundamental de las Finanzas es lo que ha venido llamándose el *«valor del dinero a lo largo del tiempo»*. Este postulado significa que una misma cantidad de dinero va perdiendo valor a medida que se aleja el momento de su uso.

Por ejemplo, si disponemos hoy de 100 euros, su valor dentro de un año será menor porque existen determinados factores que justifican dicha disminución como pueden ser la inflación (es decir, la subida general de los precios de los bienes y servicios) y una amplia variedad de riesgos (por ejemplo, el riesgo de que se me pierda el dinero).

Antes de continuar, sería conveniente destacar que, normalmente, los escenarios en Economía son inflacionarios (como ocurre claramente en la actualidad) pero también pueden ser deflacionarios, es decir, con inflación negativa. Esto no contradice en absoluto el principio del valor del dinero en el tiempo pues, como se ha indicado, dicho postulado incluye también los riesgos a los que están sometidas las transacciones financieras.

Si tuviéramos que escribir el ejemplo anterior con alguna notación matemática, podríamos proponer la siguiente expresión, utilizando pares ordenados:

$$(100 \text{ euros, hoy}) > (100 \text{ euros, dentro de un año}).$$

Si acordamos que, desde ahora en adelante, la primera componente de cada par ordenado va a representar una cantidad de dinero (en euros) y que la segunda componente va a representar el instante (en años) en que dicha cuantía se utiliza (en Finanzas, el momento presente suele representarse por 0), podremos escribir ahora más abreviadamente:

$$(100, 0) > (100, 1).$$

Los alumnos de Secundaria conocen, desde sus primeros escarceos en el mundo de las Matemáticas, unos pares ordenados con los que han hecho cientos de operaciones: las fracciones. ¿Qué ocurriría si escribimos la expresión anterior utilizando fracciones? Sin que nadie se escandalice, nos quedaría:

$$\frac{100}{0} > \frac{100}{1}.$$

En un principio, esta expresión tiene algunas ventajas:

1. La desigualdad $>$ está justificada porque, a igualdad de numeradores, la fracción es mayor cuanto menor es el denominador.

2. El signo $>$ tiene ahora más sentido porque estamos relacionando números (racionales) y no pares ordenados abstractos.

Que nadie se ponga nervioso porque no se me olvida que siempre se ha dicho que $\frac{100}{0}$ no es un número racional al ser nulo su denominador. Podríamos recurrir a la

 ISSN 1988-5318

identidad $\frac{100}{0} = \infty$ y se mantendrían las ventajas anteriores, pero vamos a proponer una solución para evitar que aparezcan ceros en el denominador.

Esta solución consiste en sustituir cada denominador k por una exponencial cuya base sea mayor que 1 ($1 + i$, con $i > 0$) y cuyo exponente sea k, quedando la expresión anterior como sigue:

$$\frac{100}{(1+i)^0} > \frac{100}{(1+i)^1}.$$

Con esto, evitamos el inconveniente anteriormente señalado y mantenemos las ventajas descritas. Ahora que el EURIBOR está subiendo y que los préstamos a tipo de interés fijo están siendo más demandados, vamos a plantear un sencillo ejercicio de cálculo de la cuota anual para la amortización de un préstamo.

Supongamos que el *Banco Z* nos ha prestado hoy 50 000 euros que tenemos que devolver en cinco anualidades iguales, al 3,5 % anual.

Para calcular la cuota constante x que hay que pagar al final de cada año, igualamos lo que hemos recibido del banco con lo que tenemos que devolverle. Para ello, nos vamos a ayudar con la representación gráfica incluida en la Figura 1.

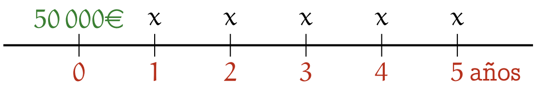


Figura 1: Representación de un préstamo bancario a 5 años

Por tanto,

$$\frac{50\,000}{(1+i)^0} = \frac{x}{(1+i)^1} + \frac{x}{(1+i)^2} + \frac{x}{(1+i)^3} + \frac{x}{(1+i)^4} + \frac{x}{(1+i)^5},$$

de donde, sustituyendo i por el tipo de interés en tanto por uno (0,035), obtendríamos el valor de $x = 11\,074{,}07$ euros.

Este planteamiento tan sencillo también podría utilizarse para operaciones de ahorro, donde una persona deposita, al principio de cada año, una cantidad constante para constituir un determinado ahorro al final.

Supongamos que ahora el *Banco W* remunera los ahorros al 1,25 % anual. ¿Cuánto tendré que depositar al principio de cada año para ahorrar 10 000 euros cuando hayan transcurrido 5 años?

Pues bien, siguiendo la anterior metodología, igualamos el global de todas las aportaciones que realizamos con la cantidad que queremos ahorrar, transcurridos 5 años. Al igual que antes, nos vamos a ayudar con la representación gráfica incluida en la Figura 2.

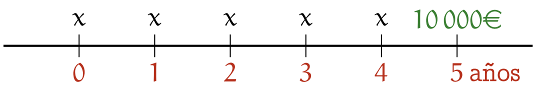


Figura 2: Representación de una operación de ahorro a 5 años

Por tanto,

$$\frac{x}{(1+i)^0} + \frac{x}{(1+i)^1} + \frac{x}{(1+i)^2} + \frac{x}{(1+i)^3} + \frac{x}{(1+i)^4} = \frac{10\,000}{(1+i)^5},$$

de donde, sustituyendo i por 0,0125, obtendríamos el valor de $x = 1926{,}54$ euros.

Podríamos seguir poniendo más ejemplos de operaciones financieras aplicando esta sencilla metodología que, aprovechando la similitud de las fracciones con los capitales financieros, nos ha conducido, sin querer, a un curso rápido de cálculo financiero. ■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

Dos andaluzas entre las mujeres pioneras de la Matemática española

Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla

Isabel María Ortiz Rodríguez
Universidad de Almería

Carmen Magallón Portolés, nacida en Zaragoza en 1951 y doctora en Física (con una tesis en Historia de la Ciencia sobre las mujeres pioneras españolas en las ciencias), tiene publicadas numerosas contribuciones sobre las primeras mujeres españolas que accedieron a la universidad y que, tras finalizar sus carreras, empezaron a ejercer sus profesiones en unos años en los que las leyes vigentes dificultaban muchísimo, cuando no impedían totalmente, tanto el acceso de la mujer a los estudios universitarios como también, después, el ejercicio de su actividad profesional.

Magallón aporta en uno de sus trabajos una relación de doce mujeres que ingresaron entre 1911 y 1936 como socias de la Sociedad Matemática Española, actual Real Sociedad Matemática Española (ver [1]). Esta sociedad admitía no solo a licenciados y licenciadas en Matemáticas, sino también a los de otras disciplinas científicas que por su trabajo o dedicación estuvieran relacionados con las Matemáticas.

Algunas de estas mujeres marcaron hitos importantes en el desarrollo de la ciencia española y, por tanto, pueden ser consideradas pioneras, como María Montserrat Capdevilla D'Oriola, primera catedrática de Instituto, Felisa Martín Bravo, primera doctora en Física, y María Carmen Martínez Sancho, primera doctora en Matemáticas (ver [2, 3] para más información).

En el grupo de doce mujeres hay una nacida en Andalucía, Águeda Gimeno Payá, sobre la que vamos a hacer una breve biografía y también de otra andaluza, María de los Remedios Ruiz Feixas, aunque son muy escasos los datos encontrados en la literatura.

 ISSN 1988-5318

Águeda Gimeno Payá

Águeda Gimeno nació en Jaén capital, no se conoce la fecha exacta, pero debió ser entre 1909 y 1911. Tampoco se tienen datos familiares, ni dónde realizó el Bachillerato, aunque quizás fuera en el Instituto de Segunda Enseñanza de su ciudad.

En 1922 inició sus estudios en la *Sección de Ciencias Exactas* de la *Universidad Central* de Madrid, finalizándolos en 1927, convirtiéndose así en una de las primeras mujeres licenciadas en Matemáticas (entonces Ciencias Exactas) en España.

Fue socia de la *Sociedad Matemática Española* desde 1927 hasta 1932. En este tiempo estaba viviendo en Priego de Córdoba. Entre 1925 y 1926 publicó dos artículos de ejercicios resueltos en la *Revista Matemática Hispano Americana* (ver [1]).

Pioneras españolas en las Ciencias...

A.3

SOCIAS DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
1911-1936

NOMBRE	AÑO DE INGRESO, CIUDAD
BARRERA, Josefa	1912, MADRID
CAPDEVILLA D'ORIOLA, Mª Monserrat	BARCELONA
COLINO, María Silvia	
GARCÍA, Josefa V.	1925, LOGROÑO
GIMENO, Águeda	1927, CÓRDOBA
MARTÍN BRAVO, Felisa	1925, MADRID
MARTÍNEZ E., María del Pilar	
MARTÍNEZ SANCHO, María Carmen	1925, MADRID
OÑA, María Carmen	1914
PARDO GAYOSO, María de los Dolores	
RIGADA RAMÓN, María de la	1913
ROIG MOTA, Irene	

Águeda dio clases de Ciencias Naturales en el *Instituto de Enseñanza Secundaria Albariza*, de Mengíbar (Jaén), y más tarde obtuvo por oposición la cátedra de Matemáticas del actual *Instituto Virgen del Carmen* de Jaén, en el que trabajó más de 30 años y ocupó la secretaría a partir de 1960.

María de los Remedios Ruiz Feixas

Si consideramos como «pioneras de la matemática española» a las mujeres que se licenciaron y comenzaron a ejercer su actividad profesional con anterioridad a la Guerra Civil, hubo también otra mujer andaluza, María de los Remedios Ruiz Feixas, que no está incluida en la lista de Magallón por no haberse afiliado a la *Sociedad Matemática Española*.

Nacida en Córdoba capital sobre 1905, María de los Remedios Ruiz Feixas inició los estudios de Bachillerato en el *Instituto Nacional y Técnico* de su ciudad en 1922. En la memoria del curso académico 1922/23 del instituto [6] puede verse que el número de matrículas de varones fue 291, frente a 12 hembras, lo que muestra el escaso acceso de las mujeres a los estudios de secundaria.

Matrícula Oficial

En el curso de 1922 a 1923 a que se refiere esta memoria, se matricularon en e te Instituto los alumnos que se detallan a continuación:

ÉPOCA	NÚMERO DE ALUMNOS			NÚMERO DE INSCRIPCIONES		
	Varones	Hembras	TOTAL	De Honor	Ordinarias	TOTAL
Mes de Septiembre de 1922 . . .	291	12	303	70	1 358	1.428

Por razones no conocidas, se trasladó a Zaragoza para estudiar Matemáticas en la Facultad de Ciencias, licenciándose en 1931 y más tarde se doctoró en la *Universidad Central* de Madrid (única Universidad en la que por aquel entonces se podían cursar esos estudios).

Es, por tanto, una de las pocas mujeres de su época que obtuvieron el grado de doctora, no solo en Matemáticas sino en cualquier disciplina.

Según una información aparecida en el *Diario de Córdoba* de 18 de mayo de 1934, en esa fecha se encontraba dando clases en el Instituto de Segunda Enseñanza de Linares. En el texto se la elogiaba por *«su gran talento en la docencia y erudición en el campo de las Matemáticas, tal como se pudo observar en una conferencia que dio en el Instituto de Linares sobre ecuaciones diofánticas»*.

No se dispone de más datos sobre su vida salvo el hecho de que falleció en Madrid, el 11 de diciembre de 2012.

A diferencia de las mujeres pioneras de la ciencia en otros países, en España no son bastante conocidas las mujeres que marcaron hitos importantes en el desarrollo de la ciencia española. El objetivo de estas líneas ha sido sacar a la luz la figura de dos andaluzas que aportaron sus conocimientos y su actividad al campo científico, habiendo vivido, accedido a la educación y trabajado en una época muy difícil.

Referencias

[1] Magallón Portolés, C. (2004). *Pioneras españolas en las ciencias. Las mujeres del Instituto Nacional de Física y Química*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.

[2] Núñez Valdés, J., Arroyo Castilleja, M. y Rodríguez Arévalo, M.L. (2012). *María Teresa Capdevila D'Oriola, pionera de la Matemática española*. Revista Pensamiento Matemático 2, 1–25.

[3] Núñez Valdés, J. y Ortiz Rodríguez, I.M. (2021). *Mujeres matemáticas pensionadas por la Junta de Ampliación de Estudios*. Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL, vol. xv, núm. 2, 16–17.

■

[6] Se puede acceder a memoria completa pinchando *aquí*.

ISSN 1988-5318

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Números normales

Pablo Sánchez Martínez
Estudiante del Grado en Matemáticas de la UAL

Seguro que cuando escucháis la palabra «matemáticas», lo primero que se os viene a la cabeza son números, pues están llenas de ellos, y de lo más curiosos, tanto, que os sorprendería la cantidad de tipos de números extraños que hay, desde aquellos que ni siquiera se pueden definir, hasta los que hoy nos ocupan, aquellos números decimales que contienen dentro de sí a todos los que tienen un número finito de dígitos, los llamados números normales.

Esto significa, que cualquier concatenación de cifras (parejas, tríos...), aparecerá en algún momento dentro del número. Además, la cantidad de veces que aparece el 2 es la misma que la del 3, y el 345 aparece las mismas veces que el 782, por ejemplo. En general, todos los números de k cifras aparecen el mismo número de veces.

Fueron introducidos por el matemático francés Émile Borel en 1909, y se pueden definir matemáticamente de la siguiente manera:

> *Sea s una sucesión finita de cifras, entonces $N(s,n)$ es el número de veces que aparece dicha concatenación de cifras en los n primeros dígitos del número.*

Por ejemplo, $N(1,5)$ para $3{,}141592\ldots$ sería 2, y $N(18,10)$ en $2{,}718281828\ldots$ es 2.

Dicho esto, todo número normal deberá cumplir la siguiente condición:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(s,n)}{n}=\frac{1}{10^k},$$

donde k es el número de cifras de s, puesto que 10^k es el total de sucesiones distintas de k cifras.

Uno de los ejemplos más inmediatos sería el número $0{,}12345678910111213\ldots$, conocido como *número de Champernowne*, que se puede demostrar que viene dado como suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 10^{-a(n)},$$

siendo $a(n)$ la suma del número de cifras de los números $1,2,\ldots,n-1$, de modo que, por ejemplo, para $n=11$, $a(11)=$ n.º de cifras de $1+$ n.º de cifras de $2+\cdots+$ n.º de cifras de $10=1+1+\cdots+1+2=11$.

También se ha demostrado que se puede representar de esta manera:

$$a(n)=\sum_{k=1}^{n}([\log_{10}k]+1),$$

donde $[x]$, llamada parte entera de x, elimina la parte decimal de x, de manera que $[\log_{10}k]+1$ te devuelve el número de cifras de k. Por ejemplo, $[\log_{10}101]+1=3$.

Algunos ejemplos adicionales de estos números son, por ejemplo: la *constante de Copeland-Erdős*, que consiste en la concatenación de los números primos: $0{,}23571113171923\ldots$ Curioso, ¿verdad? Al menos a mí me lo parece.

¿Pero qué pasa si los modificamos un poco?

¿Recordáis el número normal de Champernowne que mencioné unas líneas antes? Pues se puede definir una sucesión de manera que le dé la vuelta al número, es decir, en vez de empezar por 1, en la iteración k-ésima empezará por k:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(n-(i-1)\cdot 10^{-c_i}),$$

siendo

$$c_i=\sum_{i=1}^{k}([\log_{10}(k-(i-1))]+1).$$

Así, en lugar de aparecer i en las sumatorias, aparece $n-(i-1)$ lo que significa que el primer término será n, el segundo $n-1$, así hasta el n-ésimo término, que será 1.

Como ejemplo, la duodécima iteración sería:

$$S_{12}=0{,}121110987654321.$$

Si seguimos iterando, nos daremos cuenta de que esta sucesión no converge (pues la primera cifra decimal oscila entre 1 y 9), pero tampoco diverge (todos sus términos son menores que 1), lo que nos da una curiosa sucesión que ni converge ni diverge.

Ahora hacemos una segunda modificación del número normal de Champernowne. Concretamente, vamos a hacer que en vez de contener a cada número una sola vez, contenga a cada número n, n veces:

$$Z_n=Z_{n-1}\cdot 10^{n([\log_{10}n]+1)}+n\cdot\sum_{k=1}^{n}10^{k([\log_{10}n]+1)-1}.$$

Como veis, ahora no solo hay que hacer hueco en cada iteración n al número n-ésimo, sino que además hay que hacérselo n veces, de lo que se encargan las n y k multiplicando a los exponentes de cada 10. Como ejemplo, $Z_7=1223334444555556666667777777$.

Lo que nos da una sucesión que se va a infinito, aunque si queremos que la sucesión Z_n no diverja, podemos dividir cada término entre 10 elevado a su número de cifras:

$$S_n=\frac{Z_n}{10^{[\log_{10}Z_n]+1}}.$$

Así, $S_7=0{,}1223334444555556666667777777$.

De manera que el límite de la sucesión sería la concatenación de todos los números enteros n, cada uno n veces, empezando desde el 1.

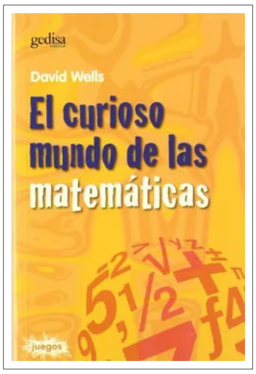
Por acabar en una nota curiosa, existe la conjetura de que algunos números irracionales como los famosos números π, e y $\sqrt{2}$ son normales, aunque no está formalmente demostrado.

Algo que sí está demostrado es que la cantidad de números normales es mucho mayor que la de números no normales, algo un poco contraintuitivo ¿no? Como muchas otras cosas que descubriréis profundizando un poco en matemáticas. ■

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

El curioso mundo de las matemáticas.

David Wells.



Ficha Técnica
Editorial: Gedisa.
320 páginas.
ISBN: 978-84-7432-781-6.
Año: 2008.

Este libro, que se publicó originalmente en inglés el año 1997 bajo el título *Curious and interesting mathematics*, se tradujo al castellano y se publicó en España por primera vez en el año 2000.

Para mí, el título en castellano es más descriptivo de la naturaleza del contenido que el utilizado en la versión original.

Realmente podemos decir que se trata de relatar «curiosidades» sobre matemáticos más que las relacionadas con las matemáticas como materia.

Si vas buscando un libro de matemáticas, esta no es la mejor elección, pues se trata de una obra que recopila anécdotas, historias o sucesos que han ocurrido en el devenir de los tiempos en el ámbito matemático.

Esto no implica que el texto carezca de interés pues, junto a hechos bastante conocidos relacionados con personajes del mundo matemático, aparecen otros tantos que –por lo menos para mí– eran totalmente desconocidos y que me han resultado muy interesantes.

El libro se estructura en apartados breves –casi ninguno pasa de una página– en los que se describe alguna curiosidad relacionada con algún personaje matemático.

Estos apartados no siguen ningún orden cronológico ni temático, van fluyendo en el texto de forma continua.

En resumen, un libro interesante para aquellas personas que quieran conocer algunas cuestiones relacionadas con personajes matemáticos más allá de su obra matemática.

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Citas Matemáticas

«Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se revelan a quienes tienen el valor de profundizar en ella».

Carl F. Gausss (1777–1885), matemático, físico y astrónomo alemán.

«Todos los efectos de la naturaleza son tan solo las consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes inmutables».

Pierre-Simon Laplace (1749–1827), matemático, físico y astrónomo francés.

ISSN 1988-5318

Páginas web y redes sociales

matematicasentumundo.es

Página de inicio

La página web *matematicasentumundo.es* trata distintas circunstancias en nuestra vida cotidiana donde aparecen las matemáticas.

Una característica que hace interesante esta página es la variedad y cantidad de temas que trata. Hay secciones sobre arte, concursos, deportes, exposiciones de diferente carácter, historia, humor, ciudades particulares, blogs de aula de distintos profesionales, narraciones, cuestiones para pensar, naturaleza, publicidad, rutas matemáticas, cine y series de televisión, enlaces web, pruebas resueltas y explicadas de EvAU, fotografías matemáticas, juegos, medios de comunicación, multimedia, paradojas y engaños, poesía, resolución de problemas, temas relacionados con el COVID19 y textos y artículos.

El común denominador es el punto de vista desde el que se enfocan estas cuestiones: el aspecto divulgativo de las matemáticas.

Es una web reciente, comenzó en 2004. No hay afán alguno de lucro, puesto que carece de publicidad y se cita la procedencia de todos los materiales que no son originales. El año pasado recibió 761 visitas diarias de media.

Algunas colaboraciones son reproducidas después en un programa de radio de Aragón, aumentando así su difusión. En 2012 fue incluida en la lista de proyectos más interesantes de alfabetización audiovisual en España. En el mismo año se incluyó entre las tres webs matemáticas españolas más populares, según la web *euromathsoc.org* de la *European Mathematical Society*.

En las últimas ediciones aparecen noticias sobre museos y talleres matemáticos. Son secciones dinámicas que se van intercalando con las fijas. Por su variedad y carácter divulgativo y por la reputación de sus contrastados colaboradores, creemos que es un lugar altamente recomendable para visitar.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

Acertijos

A un estadio de la gloria

Corinto, último tercio del siglo V a. C.

Alexios es un reconocido entrenador de atletas. Trabaja desde hace algunos meses con un grupo de 81 hombres. De cara a la próxima edición de los Juegos, debe seleccionar a los 4 atletas más rápidos, que viajarán a Olimpia con la intención de inscribirse en la carrera de velocidad [7].

Alexios dispone de una pista en la que pueden correr 9 atletas simultáneamente, pero carece de medios para registrar los tiempos invertidos por cada uno de ellos. ¿Cuántas carreras, como mínimo, tendrá que celebrar para quedarse con los 4 hombres más rápidos?
(En el próximo número aparecerá la solución.)

Solución al acertijo del número anterior

Con motivo de la graduación de Marta y Juan, su abuelo había decidido obsequiarlos con una cierta cantidad en efectivo. No obstante, para acceder al importe total (que se tendrían que repartir equitativamente), les imponía la condición de adivinarlo mediante el procedimiento que sigue.

En presencia de su abuelo, se colocarían a cierta distancia dándose la espalda. Cada uno de los nietos recibiría un sobre con un número entero, comprendido entre 0 y 20, escrito en su interior. Leerían dicho número, pero no podrían hacerlo público bajo ningún concepto.

La suma de ambos enteros (multiplicada por mil) sería el importe exacto (en euros) que tendrían que repartirse.

Con suficiente antelación, su abuelo les había comentado que solo contemplaba dos alternativas para el valor exacto de la suma. Ascendería a 15 o bien a 20 (pues había descartado todas las demás posibilidades).

Una vez que Marta y Juan conociesen sus respectivos enteros, preguntaría a Marta si era capaz de adivinar el importe exacto de la suma. Ella tendría que contestar con un sí o un no. En caso afirmativo, pronunciaría en voz alta el valor que hubiese estimado. En caso negativo, no diría nada más (por el momento) y el abuelo trasladaría la pregunta a Juan. Su respuesta seguiría el protocolo ya descrito para Marta. Todo continuaría de este modo (preguntando de forma alternativa a Marta y a Juan) hasta que uno de ellos descubriese el valor buscado.

Suponiendo que Marta y Juan razonaban correctamen-

[7] En esta prueba han de recorrer un estadio (192,27 metros).

 ISSN 1988-5318

te, nos pedían el número máximo de veces que formularía la pregunta el abuelo para que uno de sus nietos adivinara la solución.

Sea M el entero asignado a Marta y J el entero asignado a Juan. De acuerdo con las premisas planteadas por el abuelo, $M+J$ solo admite dos posibles resultados (15 o 20).

Texto de la pregunta en todos los casos: *«¿conoces ya el importe exacto de la suma?»*

Pregunta 1: (dirigida a Marta). Si $M \geq 16$ la respuesta de Marta sería afirmativa y acto seguido declararía que $M+J=20$ (evidentemente, en la situación descrita, es imposible que la suma sea igual a 15). Aquí habría finalizado el proceso. Por el contrario, si $M \leq 15$, Marta no podría garantizar el valor de la suma y, por tanto, contestaría negativamente. En virtud de ello Juan sabría también que $M \leq 15$ (de no ser así Marta habría contestado afirmativamente).

Pregunta 2: (dirigida a Juan). Si $J \leq 4$ la suma asciende como máximo a 19 (pues, como ya hemos señalado, $M \leq 15$).

El valor 20 resultaría inalcanzable y Juan respondería afirmativamente declarando que $M+J=15$. Por otra parte, si $J \geq 16$, la respuesta también sería positiva y Juan afirmaría que $M+J=20$. En cualquiera de las dos situaciones el proceso habría terminado. Sin embargo, si $5 \leq J \leq 15$, Juan no tendría argumentos para adivinar la suma y contestaría negativamente. Como consecuencia, Marta sabría que $5 \leq J \leq 15$.

Pregunta 3: (dirigida a Marta). Si $M \geq 11$ es claro que la suma es mayor o igual que 16 y, en tal caso, Marta respondería afirmativamente declarando que $M+J=20$. De forma análoga, si $M \leq 4$, la suma es menor o igual que 19 y Marta también respondería afirmativamente declarando en este caso que $M+J=15$.

En cualquiera de tales situaciones el proceso habría concluido. Por el contrario, si $5 \leq M \leq 10$, Marta no podría conocer la suma y contestaría negativamente. De este modo, Juan comprendería que $5 \leq M \leq 10$.

Pregunta 4: (dirigida a Juan). Si $J \leq 9$ la suma asciende como máximo a 19 y Juan respondería afirmativamente declarando que $M+J=15$.

Por otra parte, si $J \geq 11$, la respuesta sería igualmente positiva y Juan afirmaría que $M+J=20$. En cualquiera de estas dos circunstancias el proceso habría finalizado.

En cambio, si $J=10$, Juan no tendría acceso al valor de la suma y contestaría negativamente. Tal respuesta indicaría a Marta que $J=10$.

Pregunta 5: (dirigida a Marta). Es evidente (siendo $J=10$) que $M=5$ o $M=10$. En ambos casos, Marta respondería afirmativamente declarando que el valor de la suma es 15 o 20, respectivamente.

En vista de la argumentación anterior, pueden ser necesarias hasta 5 preguntas para desvelar la cuantía exacta de la suma.

TERRITORIO ESTUDIANTE

Anécdotas matemáticas

Manuel Álvarez Molina Prados
Andrea Estrada Escánez
Cristina Martín Aguado
Pablo Sánchez Martínez
Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

Las matemáticas están llenas de personas curiosas y aún más curiosas anécdotas, desde la manzana que golpeó a Newton en la cabeza, o por ejemplo, cómo Gauss, uno de los matemáticos más relevantes hasta la fecha, pudo esquivar el castigo de un profesor que ordenó a toda la clase sumar todos los números del 1 al 100 gracias a un simple truco.

Uno de estos curiosos personajes es Évariste Galois, de quien comenzamos escribiendo hoy.

Aunque a menudo a los matemáticos se les conceda fama de personajes aburridos, Galois es todo un contraejemplo, y las circunstancias de su muerte son con total seguridad la mayor prueba de ello.

El duelo de Galois

Évariste Galois (1811 – 1832) fue el matemático francés que, con menos de 20 años, escribió la bien conocida en nuestro grado *teoría de Galois*.

Évariste Galois

Su interés por la política y su desacuerdo con el sistema conservador le llevaron a cumplir una condena de 9 meses en prisión. Tras cumplirla, fue retado a un duelo contra el campeón de esgrima del ejército francés. Aunque los motivos del duelo se desconocen, parece que pudo ofender a Stephanie Potterin; la joven de la cual estaba enamorado y no era correspondido.

Galois, casi convencido de que no ganaría el duelo, escribió 3 cartas en las que añadió el trabajo que había de-

 ISSN 1988-5318

sarrollado en detalle:

> *«He hecho algunos descubrimientos. Todo ello puede verse aquí, en tres memorias... Haz petición pública a Jacobi o a Gauss para que den su opinión, no acerca de la veracidad, sino sobre la importancia de estos teoremas. Confío en que después algunos hombres encuentren de provecho organizar todo este embrollo. No me queda tiempo»*,

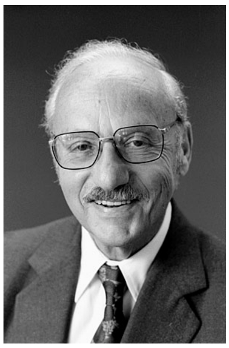
escribió en la carta a su amigo y matemático Auguste Chevalier.

Un día después (el 30 de mayo de 1832), a primera hora de la mañana, Galois perdió el duelo de pistolas y falleció al día siguiente a las diez de la mañana (probablemente de peritonitis), en el hospital Cochin. Sus últimas palabras a su hermano Alfredo fueron: *«¡No llores! Necesito todo mi coraje para morir a los veinte años»*.

Después del dramatismo de la vida y muerte de Galois, contamos una historia en la que el despiste de su protagonista conllevó un gran impacto en las matemáticas modernas.

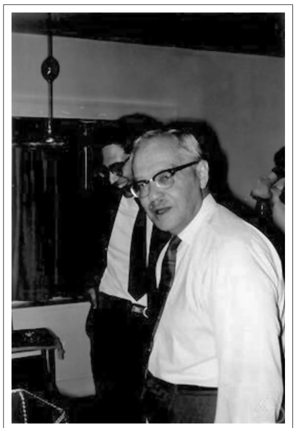
La confusión de Dantzig

Raro es el día que no presenciamos una publicación con frases motivadoras para el lector haciendo hincapié en lo importante que es una buena actitud ante un problema. Es un tema sobre el que podemos mostrarnos algo escépticos. Sin embargo, el matemático George Bernard Dantzig (1914-2005) nos ha demostrado que una buena postura frente a un problema, aunque sea de forma accidental, como lo fue en su caso, lo es todo para lanzarse a resolverlo.



George B. Dantzig

Dantzig llegó tarde a una de sus lecciones de estadística, que, por lo visto, no era un acontecimiento extraordinario en él. Fue al sentarse cuando se dio cuenta de que en la pizarra se encontraban dos problemas escritos, lo cual interpretó como una tarea que tenía que realizar para la próxima clase.



Jerzy Neyman (1894–1981)

El joven estudiante procedió como de costumbre a resolver los problemas y los entregó. La sorpresa apareció cuando Neyman, su profesor, le notificó que eran dos problemas abiertos de estadística que había escrito en la pizarra para que el alumnado fuese consciente de su existencia.

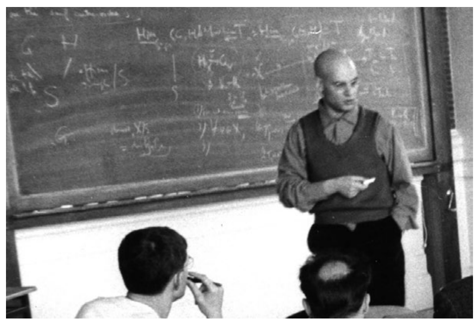
La resolución de estos problemas dio lugar a que Dantzig desarrollara el conocido método del símplex, capaz de dar una respuesta óptima a problemas de asignación sin la ayuda de un ordenador. Este método revolucionó por completo aspectos de planificación, pues, hoy en día se utiliza en numerosos ámbitos para dar respuesta a problemas de la matemática aplicada.

Esta curiosa anécdota nos hace reflexionar sobre la actitud que tenemos ante los problemas, concretamente, matemáticos. Si el joven Dantzig hubiese sido consciente de que los problemas no eran una tarea, ¿se habría desanimado ante la dificultad de los problemas sin llegar siquiera a intentarlos?

Cambiando de tema, como sabréis, son diversas las condecoraciones que se entregan dentro del mundo de las matemáticas, pero no siempre son bien recibidas, aunque pueda resultar extraño.

El rechazo al reconocimiento

La mayoría de galardonados aceptan y sienten como un honor recibir el premio, pero en algunas ocasiones, no ven con buenos ojos dicho reconocimiento. En la mayoría de ocasiones, la persona que desestima el galardón lo hace por oponerse al propio concepto de ser premiado, otras veces el rechazo se produce en una suerte de protesta ante la organización emisora de la condecoración. Aquí presentamos dos episodios en los cuales el ganador de un premio no estaba tan satisfecho con el hecho de ser premiado.



Alexander Grothendieck

Uno de los matemáticos más relevantes del siglo XX es Alexander Grothendieck (1928–2014). Es una de las figuras más importantes en la creación de la geometría algebraica en su forma actual y padre de la K-teoría.

Hijo de revolucionarios, Grothendieck manifestó en parte ese espíritu combativo durante toda su vida. Durante su carrera, recibió dos grandes distinciones: la *Medalla Fields* en 1966 y el *premio Crafoord* en 1988.

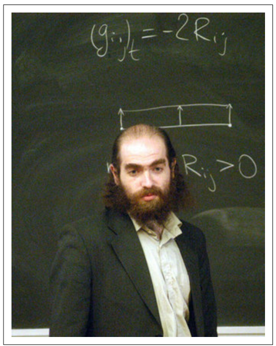
En la primera de las ocasiones no se presentó en Moscú para recoger el galardón, el matemático argumentó que lo hizo en protesta frente la URSS y sus operaciones militares en el este de Europa. El *premio Crafoord* lo rechazó alegando que no quería «participar en el declive de la ética científica» ya que «los robos entre colegas habían sido aceptados por todos». De hecho, Grothendieck había abandonado los entornos de la comunidad científica a principios de los años 70.

Un matemático vivo de suma importancia es Grigori Perelmán (1966). Es conocido por haber resuelto la *conje-*

ISSN 1988-5318

tura de Poincaré, uno de los problemas del milenio propuestos por el Instituto de Matemáticas Clay que, por cierto, es el único que a fecha de hoy tiene solución.

Perelmán recibió en 2006 la *Medalla Fields* por sus contribuciones a la geometría y sus ideas sobre el flujo de Ricci, pero el ruso desestimó el premio a pesar de los esfuerzos de la IMU (Unión Matemática Internacional). «No estoy interesado en el dinero o la fama. No quiero ser una atracción como un animal de zoológico. No soy un héroe de las matemáticas. Ni siquiera soy tan exitoso; por eso no quiero que todos me miren», alegó el matemático. Es la única persona que ha rechazado la Medalla Fields.



Grigori Perelman

En 2010 fue premiado por el *Instituto Clay* con un millón de dólares por haber demostrado la conjetura de Poincaré. Perelmán consideró la decisión injusta por no compartir el reconocimiento con Richard Hamilton, cuyo trabajo sirvió de base para el desarrollo de Perelmán. A esto hay que sumar que hubo cierta polémica con un grupo de matemáticos chinos por supuestamente haber intentado robar y menospreciar el trabajo de Perelmán. El genio ruso abandonó completamente las matemáticas en 2010.

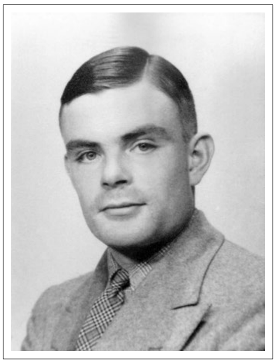
Hemos visto que las matemáticas están plagadas de personajes de lo más singulares, desde apasionados duelistas, hasta talentosos despistados, o bien auténticos inconformistas, pero esto no ha sido todo.

La guerra de Turing

Alan Turing (1912–1954), cuyo nombre quizás os suene, fue un hombre de muchos campos: matemático, lógico, filósofo… pero el área que lo llevó a la fama de la que hoy goza su nombre es, sin duda, la criptografía.

Allá por 1939, cuando estalló la Segunda Guerra Mundial, Turing ya era un reputado matemático, y fue por ello por lo que fue convocado a Bletchley Park por la *Escuela Gubernamental de Código y Cifrado* de Reino Unido para tratar de contar con él con el objetivo de descifrar e interpretar comunicaciones alemanas cifradas a través de la máquina llamada *Enigma*.

Ante la inmensa dificultad del desafío, y ante la impresión de falta de progreso, Turing planteó la posibilidad de que, para poder derrotar a una máquina, hiciera falta otra máquina. Fue entonces cuando diseñó la máquina *«Bombe»*, que supuso un tremendo progreso en cuanto a descifrado de códigos, ya que era capaz de simular el funcionamiento de la máquina *Enigma* y poder así revertirlo.



Alan Turing

Al cabo de un tiempo, contaban ya con decenas de ejemplares de estas máquinas, por lo que pudieron ser capaces de interceptar y descifrar numerosas comunicaciones nazis. Algunos historiadores afirman que el trabajo de Turing pudo acortar la guerra hasta cuatro años.

Aunque este no es el único conflicto que libró el matemático, pues en 1952 sufrió un robo en su casa, pero tras denunciarlo e iniciar la policía su correspondiente investigación, la homosexualidad de Turing (que por aquel entonces era delito) fue destapada. A Turing se le imputaron cargos legales, pero se negó a defenderse de ellos ante la creencia de que no tenía nada de lo que disculparse.

Como consecuencia, se vio obligado a someterse a un tratamiento hormonal, lo que le produjo profundos cambios físicos y un grave declive en su salud. Dos años después, en 1954, murió a causa de envenenamiento por cianuro, según se cree, debido a una manzana contaminada, lo cual se interpretó oficialmente como suicidio.

Finalmente, recibió un indulto por parte de la recientemente fallecida Reina Isabel II.

Como habréis podido comprobar, las matemáticas no son solo números, también están plagadas de curiosas anécdotas e historias como sobre las que hoy hemos escrito, y las que esperamos que hayáis disfrutado leyendo. ■

 ISSN 1988-5318

Responsables de las secciones

- **Actividad Matemática en la UAL**
  - *Actividades organizadas*: Helena Martínez Puertas (hmartinez@ual.es) y Sergio Martínez Puertas (spuertas@ual.es).
  - *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno Balcázar (balcazar@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
  - *Foro abierto y preguntas frecuentes*: Inmaculada López García (milopez@ual.es).
- **De la Enseñanza Media a la Enseñanza Universitaria**
  - *Experiencias docentes*: David Crespo Casteleiro (davidcasteleiro@hotmail.com), Pilar Gámez Gámez (mpgamez75@gmail.com) y Belén Ortega Sánchez (bortega@sek.es).
  - *Enseñanza bilingüe*: Daniel Prados Torrecillas (plurilinguismo.dpal.ced@juntadeandalucia.es).
- **Divulgación Matemática**
  - *La Historia y sus personajes*: Enrique de Amo Artero (edeamo@ual.es) y Blas Torrecillas Jover (btorreci@ual.es).
  - *Concurso de problemas*: Alicia María Juan González (ajuan@ual.es), Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez Granero (misanche@ual.es).
  - *Las Matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez Cámara (mgamez@ual.es), Juan Antonio López Ramos (jlopez@ual.es), Francisco Luzón Martínez (fluzon@ual.es) y Antonio Salmerón Cerdán (asalmero@ual.es).
  - *Mujeres y matemáticas*: Isabel María Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez Álvarez (mramirez@ual.es).
  - *Cultura y matemáticas*: José Luis Rodríguez Blancas (jlrodri@ual.es) y José Ramón Sánchez García (jramon_sg@hotmail.com).
  - *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales Campoy (amorales@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
  - *Páginas web de interés*: José Carmona Tapia (jcarmona@ual.es) y José Escoriza López (jescoriz@ual.es).
  - *Citas matemáticas*: Alicia María Juan González (ajuan@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
  - *Pasatiempos y curiosidades*: Juan Ramón García Rozas (jrgrozas@ual.es) y José Antonio Rodríguez Lallena (jarodrig@ual.es).
  - *Acertijos*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es).
- **Territorio Estudiante**: Manuel Álvarez Molina Prados (mam562@inlumine.ual.es), Andrea Estrada Escánez (aee622@inlumine.ual.es), Cristina Martín Aguado (cristina_martinaguado@yahoo.es) y Pablo Sánchez Martínez (pablosanchezm31@gmail.com).

Aviso legal

Las opiniones expresadas en esta revista son las de los autores, y no representan necesariamente las del equipo editorial del *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*.

Los derechos de copyright de los artículos publicados pertenecen al *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL*. Cualquier persona física o jurídica que desee utilizar una parte o la totalidad de algún artículo, podrá hacerlo citando la fuente de referencia y su autor o autores.

Traducción de la entrevista a John Allen Paulos

A continuación se incluye la traducción al castellano de la entrevista con John Allen Paulos.

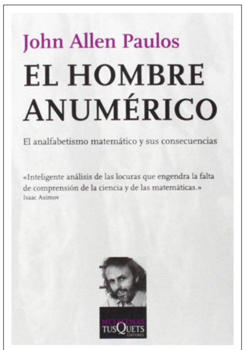
Usted tiene dos facetas: una como profesor y otra como escritor, como divulgador de las Matemáticas. ¿Qué relación hay entre ellas?, ¿cómo influye cada una en la otra?

Sorprendentemente, quizá no tanta. En clase soy un poco más serio y me atengo bastante al programa, pero de vez en cuando sí que doy una interpretación humorística de algún concepto matemático o una anécdota que esté relacionada con temas de la cultura popular.

Usted demuestra un particular sentido del humor en todos sus libros. Incluso más, los primeros se titularon *Matemáticas y Humor* y *Pienso, luego río*. ¿Cree realmente que la conexión entre el humor y las Matemáticas es más profunda que con otras disciplinas?

No sé si más profunda, pero sí que creo que hay una conexión fuerte. Tanto las Matemáticas como el humor valoran el ingenio y la inteligencia. Es más, la lógica, los patrones, las reglas y la estructura son comunes a las dos de diferentes formas. El método de *reducción al absurdo* también juega un papel frecuente en ambas, en Matemáticas como una estrategia de demostración y en humor por el absurdo en sí mismo.

En *El hombre anumérico*, usted alertaba de los peligros de no tener conocimientos matemáticos básicos. Después de 30 años, ¿ha cambiado en algo la situación?, ¿estamos aún en el mismo sitio?



Sí y no. Es difícil generalizar. El mayor énfasis en las asignaturas STEM [Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas] ha mejorado la pedagogía y la comprensión en muchas escuelas, pero por desgracia el anumerismo aún está muy extendido en la sociedad y sigue siendo un impulsor subestimado de mala política y malos políticos.

¿Qué es más importante, mejorar las destrezas matemáticas de los ciudadanos o de los gobernantes?

A corto plazo quizá las de los gobernantes, pero a un plazo algo más largo las de los ciudadanos.

¿Todavía se sorprende de ciertos comportamientos irracionales? ¿No cree que algunas guerras, por ejemplo contra las pseudociencias, están perdidas?

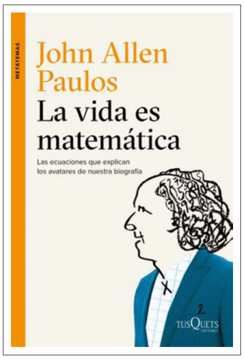
La creencia en los horóscopos y la astrología está aún muy extendida, pero me gustaría pensar que algo menos. Ahora la locura es más social (QAnon, teorías de la conspiración) que centrada en las pseudociencias tradicionales.

Cuando nos hemos equivocado en algún negocio o inversión, normalmente no lo contamos a nadie. En su caso, lejos de eso, escribió un best seller contando cómo y por qué había perdido cientos de miles de dólares jugando a la Bolsa. ¿Por qué lo hizo?, ¿fue una especie de catarsis para usted?

Es posible, pero lo que quería era escribir una especie de manual básico sobre la Bolsa. También quería recuperar algunas de mis pérdidas, y lo hice.

En *La vida es matemática*, su particular autobiografía, usted intenta ser lo más objetivo y sincero posible. ¿Cree que ha conseguido ese propósito?

Hasta cierto punto, sí.



Así como Carl Sagan dijo que todos nosotros estamos hechos de *starstuff* [material estelar], usted ha acuñado el término *mathstuff* para expresar que es el material del que «estamos hechos nosotros y todo lo demás». ¿Qué significa eso?, ¿las Matemáticas están por todas partes, dentro y fuera de nosotros?

Las Matemáticas se desarrollan a partir de la idealización y la abstracción de actividades cotidianas: combinar piedras pequeñas puede llevar a la aritmética, alinear pequeñas ramitas puede llevar a la geometría, caminar y moverse puede llevar a otras nociones matemáticas, muchas de las cuales son internas a nosotros. Evidentemente, hay más en esto...

Por cierto, en ese libro, *La vida es matemática*, se puede leer: «A medida que he ido perdiendo inteligencia, me he vuelto más escritor que matemático». Bien, ¿aún recibe felicitaciones de Navidad del gremio de escritores?

No.

Hablemos ahora de educación. Desde su propia experiencia, y también de la de sus hijos, ¿qué piensa acerca de la evolución de la educación en general, y de la educación matemática en particular?

Ha mejorado, pero de nuevo la mejora está lejos de ser uniforme. La educación matemática de mis hijos no es la típica, por razones obvias.

En su opinión, ¿cuál debe ser el uso de la tecnología en el aula de Matemáticas?

No hay una respuesta única. Depende de los estudiantes. Es importante que ellos comprendan lo que están haciendo antes de usar la tecnología que les ayude a hacerlo.

¿Y cuáles son las principales virtudes que un profesor de Matemáticas debería tener?

Comprender las Matemáticas y las diferentes formas de aprender de los estudiantes. Por supuesto, las percepciones y conocimientos psicológicos también son importantes.

Más allá de sus facetas como matemático y escritor, ¿se ve a sí mismo como un incansable observador del comportamiento humano? Sinceramente, creo que lo es.

Sí, es cierto que me fijo en aspectos de la gente que para otros pasan inadvertidos. Hay un chiste al respecto. ¿Cuál es la definición de matemático introvertido? Respuesta: Es el que mira a **tus** zapatos mientras habla contigo [8].

En sus libros, usted despliega una gran lista de filósofos de todos los tiempos: Platón, Aristóteles, Hume, Russell, Wittgenstein… ¿Cuál es su relación con la Filosofía? ¿Está más cerca de las Matemáticas de lo que podríamos pensar?

Cursé varias asignaturas como universitario, incluyendo Filosofía, antes de centrarme en las Matemáticas. El filósofo Bertrand Russell fue un ídolo mío desde secundaria, y yo sabía que era un lógico, que es el área en la que escribí mi tesis doctoral. Además, *Pienso, luego río* tiene un sabor bastante filosófico y es el reflejo de que siempre haya gravitado en torno a la Filosofía analítica.

En esta era de la post-verdad, donde las emociones amplificadas en las redes sociales son más importantes que cualquier argumentación racional, ¿cómo pueden ayudarnos las Matemáticas?, ¿nos pueden rescatar?

Las Matemáticas, concebidas en general para incluir la lógica, la probabilidad y el respeto a los hechos, es una de nuestras más fiables y básicas guías de la realidad. Como digo en mi último libro, *Who's Counting–Uniting Numbers and Narratives*, una sociedad que las reemplaza por poder, riqueza y falsedad no es una sociedad saludable.

¿Alguna vez ha intentado escribir libros no relacionados con las matemáticas? Novelas, cuentos…

Sí, pero sin éxito. Mi escritura siempre es demasiado clara y transparente como para generar suspense en una trama o en un personaje.

Su último libro, *Who's counting*, es una selección de artículos y escritos de su columna en ABC News. ¿Cuál es su común denominador?

Alrededor de la mitad son antiguas columnas que siguen siendo relevantes para temas de hoy e incluso perennes. La otra mitad es material nuevo sobre asuntos contemporáneos tales como las noticias falsas, el COVID, el aborto y la (ir)religión.

Después de ese, ¿podría anticiparnos alguna idea sobre el libro en el que está trabajando ahora?

Tan sólo voy anotando observaciones aleatorias y esperando que, después de macerarlas durante un tiempo, me sugieran un nuevo libro. ¿Quién sabe si lo harán?

Para finalizar, un ejercicio de imaginación. Si pudiera elegir un personaje histórico para hacerle una pregunta, ¿a quién elegiría y qué pregunta le haría?

No lo sé. Tendría miedo de que alguno de mis héroes resultara ser un idiota ignorante.

[8] Probablemente, Paulos alude a este conocido chiste: ¿Cuál es la diferencia entre un matemático introvertido y uno extrovertido? Que el matemático introvertido mira a sus zapatos cuando te habla, y el matemático extrovertido mira a TUS zapatos.

 ISSN 1988-5318